

# 纤维缠绕复合材料圆柱网格结构 极限轴压载荷的理论分析

廖英强<sup>1,2</sup> 刘勇琼<sup>2</sup>

1. 第二炮兵工程学院, 西安, 710025

2. 西安航天复合材料研究所, 西安, 710025

**摘要:** 为获得高承载效率的网格结构, 从纤维缠绕复合材料网格结构可能存在的整体屈曲和局部屈曲两种失稳形态出发, 推导了用于计算网格结构整体屈曲载荷和局部屈曲载荷的公式, 编写了用于计算屈曲载荷的基于 MATLAB 语言的用户程序, 并对  $\phi 480\text{mm}$  网格结构在 INSTRON1346 材料疲劳强度试验机进行了轴压实验。将计算结果与实验结果进行了对比, 结果表明: 采用整体屈曲法和局部屈曲法能够较好地预测网格结构的极限轴压及其失稳模式。

**关键词:** MATLAB; 整体屈曲; 局部屈曲; 网格结构

中图分类号: TB301

文章编号: 1004—132X(2009)19—2293—05

## Theoretical Analysis of Limit Axial Compression Load for Fiber Winding Composite Circular Lattice Structures

Liao Yingqiang<sup>1,2</sup> Liu Yongqiong<sup>1</sup>

1. The Second Artillery Engineering College, Xi'an, 710025

2. Xi'an Aerospace Composites Research Institute, Xi'an, 710025

**Abstract:** In order to attain lattice structure with high load-carrying efficiency, according to the two kinds of probable buckling modes of fiber winding composite lattice structures, overall buckling and local buckling, the equations used to compute overall buckling loads and local buckling loads were derived, and MATLAB program was compiled and used to compute buckling loads. Axial compression experiments of  $\phi 480\text{mm}$  lattice structure were carried on the INSTRON1346 material fatigue strength test machine. Computed results and experimental results were compared. As a result, using overall buckling methods and local buckling methods, limit axial compression load and buckling mode of composite lattice structures can be preferably forecasted.

**Key words:** MATLAB; overall buckling; local buckling; lattice structure

## 0 引言

航空、航天领域对材料的结构和质量有特殊的要求, 在保证结构可靠性的同时, 希望其质量越小越好。C/E(碳纤维/环氧树脂)复合材料网格结构是一种先进的结构形式, 与传统的金属结构相比, 网格结构的质量可以大幅度减小, 制造费用可减少 20%~30%。采用网格结构的探空火箭有效载荷整流罩与目前应用的铝质整流罩相比, 质量减小了 60%<sup>[1]</sup>。复合材料网格结构通常用于薄壁圆柱或圆锥壳体上, 一般由与壳体轴线成一定夹角的纵向筋和环向筋组成<sup>[2-3]</sup>。

影响网格结构承载效率的设计参数主要包括纵筋的数目、环筋的数目、缠绕角度以及筋截面的高宽比等。在复合材料网格结构的设计过程中, 由于设计参数众多, 无法通过经验预测网格结构

的承载能力, 这就需要在设计方法上寻找突破点, 通过合理选择设计方法提前预知复合材料网格结构的承载效率。目前, 国内外通用的设计方法主要有解析法、有限元法和等效刚度法。本文通过解析法和等效刚度法对复合材料网格结构极限轴压进行了预测, 并与实验结果进行了对比。结果表明: 采用整体屈曲法和局部屈曲法能够较好地预测复合材料网格结构的极限轴压及其失稳模式。

## 1 整体屈曲法

### 1.1 等效工程弹性常数

对于具有周期性微结构的材料和系统, 可以采用代表体元法或者均匀化方法<sup>[4]</sup>将其等效为具有等效性质的均匀材料和系统<sup>[5]</sup>。这种方法已广泛用于含夹杂材料、纤维增强复合材料的等效刚度的研究<sup>[6]</sup>。对于网格结构复合材料, 当所研究

结构尺寸远大于网格尺寸时,我们也可以采用这种方法。从网格结构中,选择一代表性体元;以代表性体元为研究对象,建立微结构参数(如缠绕角、筋截面性质等)与其等效性质的关系。代表性体元的提取以及均匀化过程如图1所示。

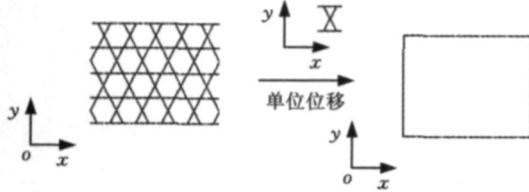


图1 复合材料网格结构均匀化过程示意图

依据复合材料力学,二维平面状态下结构的应力-应变关系为

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \\ Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \\ Q_{66} = G_{12} \\ Q_{12} = \mu_{12} Q_{22} = \mu_{21} Q_{11} \end{array} \right\} \quad (2)$$

式中,  $1, 2$  为正应力;  $12$  为面内剪切应力;  $1, 2$  为正应变;  $12$  为面内剪切应变;  $E_1, E_2$  为弹性模量;  $G_{12}$  为面内剪切模量;  $\mu_{12}, \mu_{21}$  为材料面内耦合系数;  $Q_{ij}$  为退缩刚度系数,  $i, j = 1, 2, 6$ 。

为了建立网格结构与等壁厚平板等效刚度矩阵的关系,可以分别令  $1, 2$  和  $12$  中的一个量非零,另外两个量为零;在网格结构的边界节点上,施加与此对应的位移边界条件,然后求解杆件上的力;把所得到边界杆件上的力对边界长度进行平均,从而可以得到等效工程弹性常数。

考虑三种变形模式:

(1) 固定上下两边沿  $y$  方向的位移及在平面内的转动,并对左端施加固定端约束,给右端一个沿  $x$  方向的单位位移(图2)。

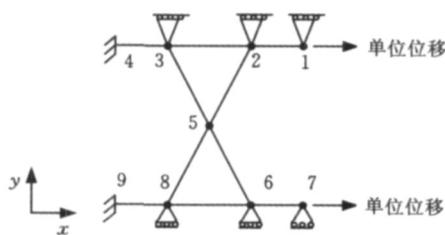


图2 第一种变形模式

(2) 对下边两端的端点施加固定端约束,下边中间的两点固定  $y$  向位移以及平面内的转动,固定上边两端的端点沿  $x$  方向的位移以及平面内的转动,给上边一个沿  $y$  方向的单位位移(图3)。

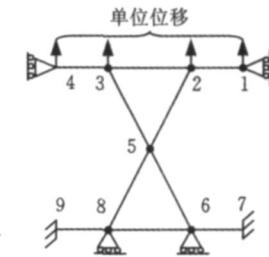


图3 第二种变形模式

(3) 对下边施加固定端约束,给上边的右端一个沿  $x$  方向的单位位移(图4)。

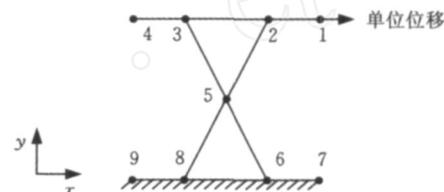


图4 第三种变形模式

采用 MATLAB 语言编写用户程序,来计算网格结构的等效刚度矩阵。将模型的几何长度以及与  $x$  轴夹角的正弦和余弦代入编写的计算程序得到单元刚度矩阵、整体刚度矩阵及节点力矢量,并最终计算得到等效工程弹性常数( $E_1, E_2, G_{12}$ )。

## 1.2 极限轴压载荷计算

将计算得到的等效工程弹性常数以及结构尺寸代入正交各向异性圆柱临界轴压(即极限轴压)公式<sup>[7]</sup>:

$$N_{cr} = 2 k_{eo} h^2 \sqrt{\frac{E_x E}{\nu \beta (1 - \nu_x)}}$$

式中,  $N_{cr}$  为临界轴压;  $k_{eo}$  为实验修正系数,一般为 0.3 ~ 0.5;  $h$  为圆筒壁厚;  $E_x$  为圆筒轴向弹性模量;  $E$  为圆筒环向弹性模量;  $\nu_x$  为圆筒泊松比。

式(3)中的实验修正系数实际上模拟了真实结构所存在的某些缺陷。在计算网格结构极限轴压时,实验修正系数  $k_{eo}$  应该取最小值,即取  $k_{eo} = 0.3$ 。

## 2 局部屈曲法

网格结构在轴向压缩载荷作用下将发生局部筋的屈曲。内部纵向筋的端部约束既不是铰支座也不是固定支座,它与其他的纵环向筋相互交叉连接着,允许纵向筋端部做有限的转动或平动。这种支撑是一种介于固定支座和铰支座之间的一种约束形式,称为弹性约束支撑<sup>[8]</sup>。对于网格结构,它内部纵向筋可能存在的典型交叉形式有 8 种,见图 5。

### 2.1 纵向筋的初始弯曲形状

研究纵向筋的面外屈曲时,纵向筋具有初始

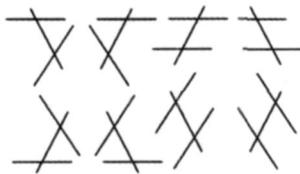


图 5 纵向筋 8 种交叉形式

弯曲,其在横截面内的投影见图 6,根据图 6 可以得到纵向筋初始弯曲形状曲线方程:

$$y_0 = R \cos \theta_1 - R \cos \theta \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \arcsin \frac{l \sin \theta - 2x}{2R} \\ &= \arcsin \frac{l \sin \theta}{2R} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$x = x \sin \theta$$

式中,为缠绕角度;  $l$  为所取纵向筋的长度;  $x$  为纵向筋上相应点的  $x$  坐标;  $y_0$  为初始弯曲形状曲线函数,  $y_0$  是  $x$  的函数;  $R$  为网格结构的半径。

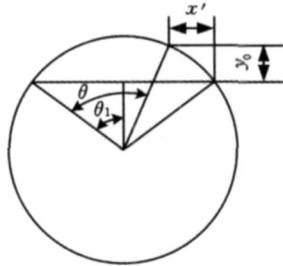


图 6 纵向筋在网格结构横截面内的投影

## 2.2 纵向筋的屈曲控制方程

对纵向筋的约束形式进行抽象简化,下端承受固定铰支座和转动弹簧约束,上端受垂直于筋横截面方向的可动铰支座和转动弹簧约束。纵向筋在沿  $x$  向压缩载荷  $N$  作用下的屈曲情形见图 7。图 7 中,  $1$ 、 $2$ 、 $3$  表示杆端的弹性固定程度,称为弹簧的约束系数,  $D_1$ 、 $D_2$  为杆端的转角,  $D_3$  为杆端的位移。根据纵向筋屈曲模型建立对坐标原点的弯矩平衡方程:

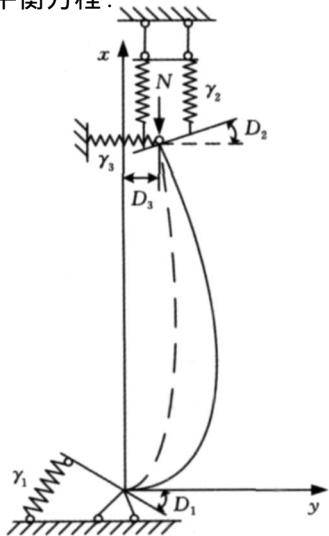


图 7 纵向筋屈曲模型

$$1 D_1 + 3 l D_3 - N D_3 - 2 D_2 = 0 \quad (6)$$

任一截面上的弯矩平衡方程为

$$M - N(y + y_0 + \frac{x}{l} D_3 - D_3) + 2 D_2 - 3 D_3(l - x) = 0 \quad (7)$$

屈曲控制方程为

$$-EIy = Ny + Ny_0 + (\frac{x}{l} - 1) ND_3 - 2 D_2 + 3 D_3(l - x) \quad (8)$$

式中,  $E$  为筋的压缩模量;  $I$  为筋的惯性矩;  $y$  为纵向筋上坐标为  $x$  的点的挠度;  $M$  为横截面上的弯矩。

## 2.3 面内屈曲时极限轴压

面内屈曲时,实际网格结构的筋本身不可能完全在一个平面内,因此,可以假定网格筋本身存在一定的缺陷,假设缺陷函数为

$$y_0 = A_1 \sin \frac{x}{l} \quad (9)$$

式中,  $A_1$  为缺陷系数,根据模具本身的公差带值来确定,本文中取  $A_1 = 0.01$ 。

令  $k^2 = \frac{N}{EI}$ , 由该缺陷函数产生式(8)的特

解为

$$y_1 = -A_1 l^2 \sin \frac{x}{l} / (-k^2 l^2 + 2) \quad (10)$$

由  $(1 - \frac{x}{l}) \frac{N}{EI} D_3 + \frac{2}{EI} D_2 - \frac{3 D_3}{EI} l + \frac{3 D_3}{EI} x$  项产生的特解为

$$y_2 = \frac{1}{k^2 EI} l \left( (1 - \frac{x}{l}) ND_3 + 2 D_2 - 3 D_3 l + 3 D_3 x \right) \quad (11)$$

故式(8)的解为

$$y = A \sin kx + B \cos kx + y_1 + y_2 \quad (12)$$

根据图 7 得到边界条件: 当  $x = 0$  时,

$$y = 0, y = D_1 = \frac{(N - 3l) D_3 + 2 D_2}{1}; \quad \text{当 } x = l \text{ 时}, y = D_3, y = -D_2.$$

将边界条件代入式(12),可得到一组非齐次方程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 - \frac{3l}{N} & \frac{2}{N} \\ \cos kl & \sin kl & -1 & \frac{2}{N} \\ 0 & k & \frac{3}{N} + \frac{3}{1} l - \frac{N}{1} - \frac{1}{l} & -\frac{2}{1} \\ -ksin kl & kcos kl & \frac{3}{N} - \frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \\ D_3 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1(0) \\ -y_1(l) \\ -y_1(0) \\ -y_1(l) \end{bmatrix} \quad (13)$$

由式(13)可以求得系数  $B$ 、 $A$ 、 $D_3$  和  $D_2$ ,则总挠

度为

$$= y_0 + y - D_3 + \frac{x}{l} D_3 \quad (14)$$

当杆件上挠度最大点的边缘纤维压应力达到材料的压缩强度时结构破坏,这时的载荷值即为杆件所能承受的最大载荷。挠度最大点可以通过循环计算程序计算得到,取受单位载荷作用时的杆件,多点取值判断以获得结构的最大挠度点。杆件破坏时的临界公式为

$$\frac{N_{\max}}{S} + \frac{N_{\max}}{W} = \tau \quad (15)$$

式中,  $N_{\max}$  为最大压缩载荷;  $S$  为杆件截面积;  $W$  为抗弯截面系数;  $\tau$  为材料的压缩强度。

编写相应的循环计算程序可以计算得到最大压缩载荷  $N_{\max}$ ,进而可以得到网格结构所能承受的极限轴压为

$$N_{cr} = 2k_e n N_{\max} \cos \quad (16)$$

式中,  $k_e$  为经验修正系数,一般取 0.6 ~ 0.8;  $n$  为纵向筋的对数。

## 2.4 面外弯曲时的极限轴压

面外弯曲时结构存在初始弯曲,即  $y_0 \neq 0$ ,令  $t = \frac{l \sin \theta - 2x \sin \theta}{2R}$ ,这时由齐次方程产生的通解为

$$y = A \sin(R \frac{k}{\sin \theta} t) + B \cos(R \frac{k}{\sin \theta} t) \quad (17)$$

此时由  $-\frac{N}{EI} y_0$  项产生式(8)的特解为

$$y_1 = \frac{1}{8} \{ 24 \cos^4 \theta + l - 48 + (12t^2 + 8) k^2 R^2 J \cos^2 \theta + 8R^4 \cos^2 k^2 + 24 + k^4 (-8 + 4t^2 + t^4) R^4 + (-12t^2 - 8) k^2 R^2 \} \frac{N}{k^6 R^3 EI} \quad (18)$$

由  $(1 - \frac{x}{l}) \frac{N}{EI} D_3 + \frac{2}{EI} D_2 - \frac{3}{EI} D_3 l + \frac{3}{EI} x D_3$  项产生的特解的公式与式(11)相同。

故式(8)的解为

$$y = A \sin(R \frac{k}{\sin \theta} t) + B \cos(R \frac{k}{\sin \theta} t) + y_1 + y_2 \quad (19)$$

根据图 7 得到边界条件

(1) 当  $x = 0$  时,  $y = 0$ ,  $y = D_1 = (N - \frac{3}{l} l) D_3 + \frac{2}{l} D_2$ ;

(2) 当  $x = l$  时,  $y = D_3$ ,  $y = -D_2$ 。

将边界条件代入式(19),可得到一组非齐次方程:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{kl}{2} & \sin \frac{kl}{2} & 1 - \frac{3}{N} l & \frac{2}{N} \\ \cos \frac{kl}{2} & -\sin \frac{kl}{2} & -1 & \frac{2}{N} \\ k \sin \frac{kl}{2} & -k \cos \frac{kl}{2} & \frac{3}{N} + \frac{3}{l} l - \frac{N}{l} - \frac{1}{l} & -\frac{2}{l} \\ -k \sin \frac{kl}{2} & -k \cos \frac{kl}{2} & \frac{3}{N} - \frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} B \\ A \\ D_3 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1(0) \\ -y_1(l) \\ -y_1(0) \\ -y_1(l) \end{bmatrix} \quad (20)$$

由式(20)可以求得系数  $B$ 、 $A$ 、 $D_3$  和  $D_2$ ,则总挠度计算公式与式(14)相同。当杆件上挠度最大点的边缘纤维压应力达到材料的压缩强度时结构破坏,这时的载荷值即为杆件所能承受的最大载荷。挠度最大点可以通过循环计算程序计算得到,取受单位载荷作用时的杆件,多点取值判断以获得结构的最大挠度点。又由杆件破坏时的临界公式(式(15)),编写相应的循环计算程序计算得到最大压缩载荷  $N_{\max}$ 。由此可以进一步由式(16)计算得到网格结构所能承受的最大极限载荷。

## 3 实验研究

为了验证理论分析方法的有效性,设计了一定结构尺寸的网格结构进行实验验证,网格结构尺寸见表 1。

表 1 实验用网格结构尺寸

直径(mm)	480
高度(mm)	210
筋宽(mm)	4
筋高(mm)	7
环筋条数	3
纵筋对数	23
缠绕角度(°)	30

实验用网格结构由 T700 - 12 K 碳纤维与环氧树脂固化而成。理论计算中使用的材料性能参见表 2。

表 2 T700 - 12 K 环氧单向板材料力学性能

$E_1$ (GPa)	118
$E_2$ (GPa)	10.4
$G_{12}$ (GPa)	4.14
	0.29
(kg/m <sup>3</sup> )	1570

采用 INSTRON1346 材料疲劳强度试验机对制造的复合材料网格结构进行轴压实验。首先将复合材料网格结构水平放置在特制的标准实验平台上,接着将材料疲劳强度试验机上端面与复合材料网格结构上端面紧密贴合,然后利用试验机缓慢加载(图 8),直至复合材料网格结构发生破坏(图 9),记录实验结果。载荷一位移曲线见图 10,实验及理论计算的结果见表 3。



图 8 复合材料网格结构轴压加载图



图 9 复合材料网格结构轴压破坏图

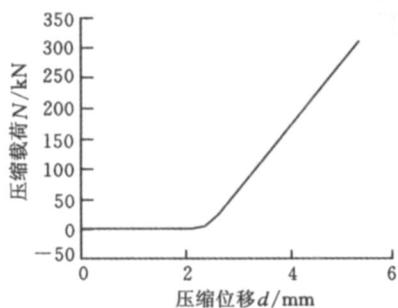


图 10 试验过程的载荷—位移曲线

表 3 复合材料网格结构极限轴压

名称		极限轴压 $N_{cr}$ (kN)
实验结果		319
计算结果	整体屈曲 ( $k_{eo} = 0.3$ )	470
	局部屈曲 ( $k_e = 0.6$ )	309

从表 3 可以看出:整体屈曲法的计算结果要大于局部屈曲法的计算结果,而本算例中整体屈曲系数选择的是经验系数的最小值,因此可以说此时网格结构发生的是局部筋的屈曲而不是整体结构的屈曲,从图 9 中也可以看到,复合材料网格结构确实发生了局部筋的屈曲。当  $k_e = 0.6$  时,局部屈曲法的计算结果小于两次实验的结果,这就说明采用该值进行网格结构设计时,结构是安全的。从表 3 中数据还可以得到:局部屈曲法的计算结果与实验测试值的相对误差仅为 3.1%。因此,利用整体屈曲法和局部屈曲法可以进行网格结构的设计,并可以预测失稳模式。

#### 4 结论

(1) 整体屈曲法和局部屈曲法可以用于复合材料网格结构的设计,并且可以预测网格结构的失稳模式。

(2) 基于网格结构安全设计的考虑,建议实验修正系数  $k_{eo}$  取 0.3,经验修正系数  $k_e$  取 0.6,此时设计的网格结构偏于安全。

(3) 由于复合材料网格结构的设计参数众多,而整体屈曲法和局部屈曲法本身可以用于复合材料网格结构的设计,因此,可以以整体屈曲法和局部屈曲法为理论基础对复合材料网格结构进行优化设计,以达到降低设计和实验成本的目的。

#### 参考文献:

- [1] Wodesenbet E, Kidane S, Pang S S. Optimization for Buckling Loads of Grid Stiffened Composite Panels [J]. Composite Structures, 2003, 60: 159-169.
- [2] 李超, 刘建超, 丘哲明. 一种新型的材料结构—复合材料网格结构 [J]. 航空材料学报, 2003, 23 (增刊 1): 276.
- [3] Vasiliev V V, Barynin V A, Rasin A F. Anisogrid Lattice Structures - survey of Development and Application [J]. Composite Structures, 2001, 54: 361-370.
- [4] 刘岭, 阎军, 程耿东. 考虑内部胞元能量等效的代表体元法 [J]. 固体力学学报, 2007, 28(3): 275-280.
- [5] 黄涛, 程桂琼, 高峰. 基于均匀化方法的缝纫层压板拉伸弹性模量有限元预测 [J]. 宇航材料工艺, 2006 (4): 29-32.
- [6] 李华祥, 刘应华, 冯西桥, 等. 确定复合材料宏观屈服准则的细观力学方法 [J]. 固体力学学报, 2002, 23 (2): 133-140.
- [7] 陈汝训. 复合材料壳体的轴压稳定性 [J]. 固体火箭技术, 2001, 24(1): 13-15.
- [8] 唐家祥. 结构稳定性理论 [M]. 武汉:华中理工大学出版社, 1990.

(编辑 卢湘帆)

**作者简介:**廖英强,男,1978 年生。第二炮兵工程学院博士研究生,西安航天复合材料研究所研发中心工程师。研究方向为固体火箭发动机设计与结构强度研究。发表论文 7 篇。刘勇琼,男,1966 年生。西安航天复合材料研究所所长、研究员、博士研究生导师。