

细观力学有限元法预测复合材料 宏观有效弹性模量

雷友锋¹, 魏德明¹, 高德平²

(1. 空军第八研究所, 北京 100076; 2. 南京航空航天大学, 南京 210016)

摘要: 基于能量等效原理提出了复合材料有效弹性模量的定义, 并指出了该定义的基础及前提条件。为从理论上计算复合材料宏观有效弹性模量, 建立了通过细观力学有限元法计算复合材料有效弹性模量的方法。复合材料宏观弹性模量, 是通过对复合材料细观结构代表性体积元的力学响应的计算来得到, 在该计算方法中, 给出了施加简便的边界载荷以及恰当的边界变形约束条件的方法。数值计算结果与部分试验结果具有较好的一致性, 表明所提出的方法能够较好地计算复合材料的宏观有效弹性模量。

关键词: 复合材料; 细观力学; 有限元法; 有效弹性模量; 代表性体积元

中图分类号: TB33 文献标识码: A 文章编号: 1672-2620(2003)02-0011-05

Predicting Macroscopic Effective Elastic Moduli of Composites by Micro-mechanics FEM

LEI You-feng¹, WEI De-ming¹, GAO De-ping²

(1. The Airforce 8th Research Institute Beijing 100076, china;

2. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics Nanjing 210016 China)

Abstract: A definition of composite effective elastic moduli is presented based on the energy equivalence principle and its basis and premise are pointed out. To predict macroscopic effective elastic moduli of composites a computational method is established based on micro-mechanics finite element method. The computational method predicts the effective elastic moduli of composites through calculating mechanical responses of a composite micro-structure representative volume element. The method of applying proper boundary load and boundary deformation constraint condition, The numerical results agree well with available experimental results, which shows that the computational method can predict the effective elastic moduli of composites correctly.

Key words: composite; micro-mechanics; finite element method; effective elastic moduli; representative volume element

1 引言

从复合材料细观结构及组分相力学性能预测复合材料宏观性能, 通常有两种方法, 即解析法和有限元法。早期多采用解析法, 如 Eshelby 等效夹杂法^[1]、自洽法^[2]、Mori-Tanaka 法^[3]等, 近期则多采用有限元法^[4~7]。解析法是基于组分相中应力应

变场的假设来预测宏观平均性能, 其不足之处在于预测精度有限, 且当遇到十分复杂的细观结构时则无能为力。而有限元法则能解决上述解析法的难题, 其方法通常是有限元法用到复合材料细观结构上的“代表性体积元 (Representative Volume Element: RVE)”上, 通过对 RVE 的应力应变响应的有限元计算, 得出宏观有效性能。本文首先从能量法

的角度提出复合材料有效弹性模量的定义, 然后对细观力学有限元法预测复合材料有效弹性模量及实施过程中应注意的问题进行较系统地阐述。

2 细观力学有限元法预测复合材料有效弹性模量的理论基础

2.1 复合材料有效弹性模量的定义

设有一复合材料体, 体积为 V , 边界为 S , 在均匀的远场边界条件(位移或力边界条件)作用下, 复合材料体内产生复杂的细观应力、应变场, 设为 σ 、 ϵ , 如图 1 所示。设相应有一个材质均匀的等效体, 体积也为 V , 边界也为 S , 在与上述同样的远场均匀边界条件作用下, 显然该匀质等效体内会产生均匀的应力、应变场, 设为 σ' 、 ϵ' 。如果该匀质等效体与复合材料体产生相同的弹性应变能, 那么就可以把该匀质等效体所具有的弹性模量作为上述复合材料体的有效弹性模量, 即 $\sigma' = C^* \epsilon'$ 。

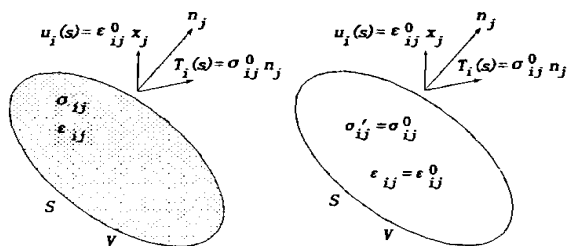


图 1 复合材料体与匀质等效体

Fig. 1 Composite object and uniform equivalent object

如果令匀质等效体中的均匀应力 σ' 等于复合材料体中的平均应力 $\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma} = \frac{1}{V} \int_V \sigma dv$, 均匀应变 ϵ' 等于复合材料体中的平均应变 $\bar{\epsilon}$, $\bar{\epsilon} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon dv$, 那么匀质等效体与复合材料体产生相同的弹性应变能。这一点可以在本文 2.2 节中得到证明。

因此, 可将复合材料体的有效弹性模量定义为:

$$\bar{\sigma} = C^* \bar{\epsilon} \quad (1)$$

其中: $\bar{\sigma}$ 为复合材料体在远场均匀边界条件作用下的应力平均值;

$\bar{\epsilon}$ 为复合材料体在远场均匀边界条件作用下的应变平均值;

C^* 即为复合材料体的有效弹性刚度矩阵, 有效弹性模量能容易地通过其与刚度矩阵系数的关系获得。

2.2 定义的基础及前提条件

运用(1)式计算有效弹性模量, 能够保证, 在(用

有效弹性模量进行复合材料宏观弹性分析时, 复合材料体中产生的弹性应变能与考虑细观结构的复合材料体中产生的真实弹性应变能相等, 这就是上述有效弹性模量定义的基础。

但是, 上述有效弹性模量定义的前提条件是具有均匀的边界载荷条件(位移或力边界条件)。只有在均匀边界载荷条件下, 定义中“ $\sigma' = \bar{\sigma}$, $\epsilon' = \bar{\epsilon}$ ”才是可行的; 而且也只有均匀边界载荷条件下, 才能保证上述“弹性应变能相等”。

2.2.1 均匀边界条件

下面来证明在均匀边界载荷条件(位移或力边界条件)下上述定义的可行性。

在均匀位移边界载荷条件下, 设 $u_i(s) = \epsilon_{ij}^0 x_j$ 。

对于匀质等效体, 显然产生均匀的应变场, 即为 ϵ^0 。

对于复合材料体, 其体内的平均应变为:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2V} \oint_S (u_i n_j + u_j n_i) ds \\ &= \frac{1}{2V} \oint_S (\epsilon_{ik}^0 x_k n_j + \epsilon_{jk}^0 x_k n_i) ds \\ &= \frac{1}{2V} \int_V [\epsilon_{ik}^0 x_k, j + \epsilon_{jk}^0 x_k, i] dv \\ &= \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}^0 dv = \epsilon^0 \end{aligned}$$

可见, 在均匀位移边界载荷条件 $u_i(s) = \epsilon_{ij}^0 x_j$ 下, 复合材料体内的平均应变 $\bar{\epsilon} = \epsilon^0$, 于是匀质等效体内的均匀应变恰好就等于复合材料体内的平均应变。此时只需令匀质等效体内的均匀应力等于复合材料体内的平均应力, 即可求得有效弹性刚度矩阵模量 C^* 。

同样, 在均匀力边界载荷条件下, 容易证明匀质等效体内的均匀应力恰好就等于复合材料体内的平均应力。此时只需令匀质等效体内的均匀应变等于复合材料体内的平均应变, 即可求得有效弹性刚度矩阵模量 C^* 。

2.2.2 “弹性应变能相等”的证明

下面给出上述定义中复合材料体与匀质等效体的弹性应变能相同的证明:

在匀质等效体中, 总应变能为 $U' = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} V$;

在复合材料体中, 总应变能为 $U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv$ 。

下面考虑均匀边界载荷条件(力或位移边界条

对于均匀力边界载荷条件, 设 $T_i(s) = \sigma_{ij}^0 n_j$,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon_{ij} (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon_{ij} (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) dv + \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} V \\ U - U' &= \frac{1}{2} \int_V \epsilon_{ij} (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) dv \\ &= \frac{1}{4} \int_V [(u_{i,j} + u_{j,i})(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})] dv \\ &= \frac{1}{4} \int_V [(u_{i,j}(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) + u_{j,i}(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}))] dv \end{aligned}$$

因为 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, 于是有 $u_{j,i}(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) = u_{i,j}(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})$,

$$\text{所以 } U - U' = \frac{1}{2} \int_V u_{i,j}(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) dv$$

根据静力平衡方程(不考虑体力) $\sigma_{ij,j} = 0$, $\bar{\sigma}_{ij,j} = 0$,

$$\text{则有 } U - U' = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} [u_i(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij})] dv$$

由于 σ_{ij} 、 ϵ_{ij} 、 u_i 等参量在复合材料体内是连续或分片连续的(不考虑基体与增强相开裂的情况), $\bar{\sigma}_{ij}$ 、 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 、 \bar{u}_i 等参量在均匀等效体内是连续的, 所以根据高斯定理有

$$U - U' = \frac{1}{2} \oint_S u_i (\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) n_j ds$$

由于匀质等效体与复合材料体有相同的应力边界条件, 即在边界 S 上有 $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}$, 所以, $U - U' = 0$ 即复合材料体与匀质等效体的弹性应变能相等。

对于均匀位移边界载荷条件, 同样可以证明, 复合材料体与匀质等效体的弹性应变能相等。

3 细观力学有限元法预测复合材料有效弹性模量的方法

根据(1)式的定义, 对于复合材料体, 计算出其在均匀边界载荷条件下的细观应力应变场 σ 与 ϵ , 再进行体积平均得到 $\bar{\sigma}$ 与 $\bar{\epsilon}$, 然后利用(1)式即可得到有效弹性刚度矩阵 C^* 。

通常, 复合材料体内, 增强相在基体内的分布是具有一定规律的, 且具有统计均匀性, 于是可以隔离出代表性体积元(RVE), 整个复合材料体就可以看作是由 RVE 周期性排列而构成的。对于连续纤维

增强金属基复合材料, 通常假设纤维在基体呈四边形排列或六角形排列, 相应的 RVE 如图 2 所示。



(a) 四边形排列的 RVE

(b) 六角形排列的 RVE

图 2 连续纤维金属基复合材料的细观结构 RVE

Fig. 2 Micro-structural RVE of fibrous MMCs

由 RVE 周期性扩展构成的复合材料体, 当承受均匀的远场外载时, 因为所有的 RVE 都是相似的, 那么它们应该表现出相似的应力、应变场, 于是就可以用一个 RVE 中的应力、应变场来反映复合材料体的细观应力、应变场。因此, 可以在一个 RVE 上运用细观有限元法, 计算出 RVE 的细观应力、应变场, 体积平均得到 $\bar{\sigma}$ 与 $\bar{\epsilon}$, 再利用式(1)可以得到复合材料的有效弹性模量。

3.1 预测有效弹性模量的过程

将式(1)改写为矩阵式

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij}^* \bar{\epsilon}_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (2)$$

$$\text{或 } \bar{\epsilon}_i = S_{ij}^* \bar{\sigma}_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (3)$$

可以通过选择施加不同的均匀位移边界载荷条件(或应力边界载荷条件)来计算有效弹性模量。选择 6 种不相关的均匀位移边界载荷(或应力边界载荷), 分别计算出在每种情况下的平均应力 $\bar{\sigma}_i$ (或 $\bar{\epsilon}_i$)。由式(2)或(3)可以解出刚度矩阵 C_{ij}^* (或柔度矩阵 S_{ij}^*)的各个分量, 然后通过弹性模量与刚度矩阵或柔度矩阵的关系计算得出复合材料有效弹性模量。

3.2 边界变形约束条件的确定

在对复合材料体施加均匀力边界载荷条件下, 当用 RVE 来模拟复合材料时, 考察 RVE 如何变形是十分重要的。复合材料承受均匀的远场外载时, 由于所有的 RVE 都是相似的, 那么它们应该表现出相似的应力应变场。就是说, 从总体上看, 应力应变场也应表现出周期性。因此可用周期性条件与连续性条件来约束 RVE 的边界变形。

在轴向或横向作用法向载荷时, 图 2 所示典型的 RVE 的边界保持平行变形, 即平面仍保持为平面。但是, 当作用轴向或横向的剪切载荷时, 一些文献^[4~6]就做出了不恰当的边界变形假设。有文献^[4~5]认为, 在横向剪切载荷作用下 RVE 的边界

变形仍保持为平面。其实这是一种过于苛刻的约束,只要 RVE 的边界变形满足周期性条件,不一定一直保持平面变形。事实上,在横向剪切载荷下, RVE 的边界可以扭曲但仍能保持位移场的周期性。对图 3 所示的多个 RVE 组合体承受横向剪切载荷的有限元分析可以说明这一点。

下面以图 2 所示的 RVE 为例,来叙述 RVE 的边界变形约束条件。

a. 正向载荷 在单独的正向载荷作用下, RVE 的边界按保持与原边界平行地进行变形。

考虑到 RVE 的几何形状和载荷形式的对称性,计算时可以取其 1/4 进行计算,如图 4 所示。具体边界变形约束条件见表 1。

b. 横向剪切载荷 纤维增强复合材料在承受

横向剪切载荷时,其应力应变场与 x_1 方向无关,仅是 x_2 与 x_3 的函数,因此可以当作二维的平面应变或广义平面应变问题处理,取 RVE 如图 5 所示。单个 RVE 的合适的边界变形约束条件,可以从多个 RVE 构成的局部复合材料体(例如图 3 所示的 9 个 RVE 集合体)的变形计算中确定。通过对图 3 所示的 9 个 RVE 集合体的变形分析可以得出,在承受横向剪切载荷下,单个 RVE 的边界变形,不必保持与原边界平行的直线,可以是弯曲的,只要能保证变形具有周期性即可。通过对 9 个 RVE 集合体的变形分析得出,图 5 所示的 RVE 在横向剪切载荷下边界变形约束条件如表 1。

c. 轴向剪切载荷 图 6 所示的 RVE,在轴向剪切载荷作用下,其边界变形约束条件见表 1。

表 1 不同载荷下的边界约束条件

Table 1 Boundary constraints under different loadings

正向载荷	横向剪切载荷	轴向剪切载荷
$u_1(0, x_2, x_3) = 0$	$u_2(-b, x_3) = u_2(b, x_3)$	$u_1(0, x_2, x_3) = u_1(a, x_2, x_3)$
$u_1(a, x_2, x_3) = const_1$	$u_3(-b, x_3) = u_3(b, x_3)$	$u_2(0, x_2, x_3) = u_2(a, x_2, x_3)$
$u_2(x_1, 0, x_3) = 0$	$u_2(x_2 - c) = u_2(x_2, c)$	$u_3(0, x_2, x_3) = u_3(a, x_2, x_3)$
$u_2(x_1, b, x_3) = const_2$	$u_3(x_2 - c) = u_3(x_2, c)$	$u_1(x_1, 0, x_3) = 0$
$u_3(x_1, x_2, 0) = 0$		$u_2(x_1, 0, x_3) = 0$
$u_3(x_1, x_2, c) = const_3$		$u_3(x_1, 0, x_3) = 0$
		$u_1(x_1, 2b, x_3) = const$
		$u_2(x_1, 2b, x_3) = 0$

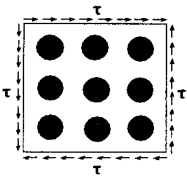


图 3 9 个 RVE 组合体
Fig. 3 Assembly of nine RVEs

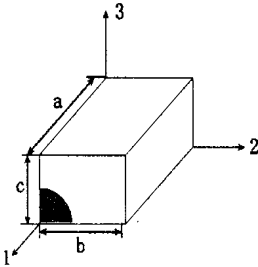


图 4 正向载荷作用下的 RVE
Fig. 4 A RVE under normal loadings

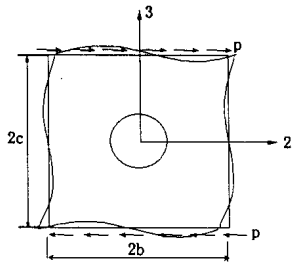


图 5 横向剪切载荷作用下的 RVE
Fig. 5 A RVE under transverse shear loading

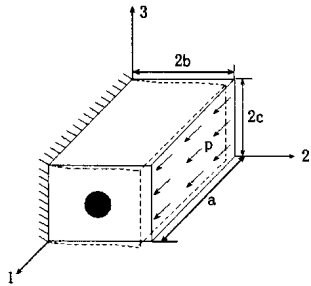


图 6 轴向剪切载荷作用下的 RVE
Fig. 6 A RVE under longitudinal shear loading

4 算例及结果分析

对单向纤维增强金属基复合材料, 假设纤维在基体中呈四边形排列或六角形排列。

计算复合材料有效模量的步骤是:

- a. 取纤维呈四边形排列的 RVE 和呈六角形排列的 RVE, 在 RVE 边界上施加均匀的力边界载荷条件;
- b. 运用细观力学有限元法计算出 RVE 中细观应力应变场及位移场;

- c. 通过体积平均或应用高斯定理计算得到平均应变, 再用式(3)就可以得到复合材料的有效柔度系数;
- d. 通过工程弹性常数与柔度系数的关系计算得到复合材料的有效弹性性能, 如 E_1 、 E_2 、 G_{12} 、 G_{23} 、 μ_{12} 、 μ_{23} 等。

对几种单向纤维增强金属基复合材料, 按细观力学有限元法计算了其有效弹性性能, 并将计算结果与部分试验结果进行了对比, 详见表 2。从表 2 中可以看出, 理论计算值与试验值具有较好的一致性。

表 2 纤维增强金属基复合材料有效弹性性能的计算值与试验值对比
Table 2 Calculated and tested results of effective elastic properties for fibrous MMCs

材料	弹性性能	计算值		试验值
		纤维四边形排列	纤维六角形排列	
B/Al ($V_f=46\%$ $E_m=69\text{ GPa}$ $\mu_m=0.33$ $E_f=414\text{ GPa}$ $\mu_f=0.2$)	E_1/GPa	228	227	228 ^[8]
	E_2/GPa	148	136	138 ^[8]
	G_{12}/GPa	57	50	57 ^[8]
	G_{23}/GPa	52	46	— — —
	μ_{21}	0.25	0.25	0.24 ^[8]
	μ_{23}	0.26	0.28	— — —
SiC/Ti ($V_f=40\%$ $E_m=109.0\text{ GPa}$ $\mu_m=0.34$ $E_f=427.6\text{ GPa}$ $\mu_f=0.25$)	E_1/GPa	235	234	230 ^[9]
	E_2/GPa	183	170	150 ^[9]
	G_{12}/GPa	67	64	62 ^[9]
	G_{23}/GPa	61	58	— — —
	μ_{21}	0.30	0.30	0.25 ^[9]
	μ_{23}	0.32	0.36	— — —

5 结论

通过本文的研究, 得出以下结论:

- a. 通过细观力学有限元法对细观结构代表性体积元的应力应变分析, 可以较准确地计算出复合材料的宏观有效弹性性能;
- b. 采用细观力学有限元法进行复合材料有效弹性性能的计算中, 应施加均匀的边界载荷条件, 并且在 RVE 边界上施加恰当的周期性与连续性边界变形约束条件。

参考文献:

[1] Eshelby J D. The Determination of the Elastic Field of an

Ellipsoidal Inclusion and Related Problem [C] . London: Proceedings of the Royal Society Series A, 1957.
[2] Hill R. A Self-consistent Mechanics of Composite Materials [J] . J Mech Phys Solids 1965, 13: 213-222.
[3] Mori T, Tanaka K. Average Stress in Matrix and Average Energy of Materials with Misfitting Inclusions [J] . Acta Metall 1973, 21: 571-574.
[4] Canuso J J. Application of Finite Element Substructuring to Composites Micromechanics [R] . NASA TM-83729, 1984.
[5] Brockenbrough J R, Suresh S, Wienecke H A. Deformation of MMCs with Continuous Fibers: Geometrical Effects of Fiber Distribution and Shape [J] . Acta Metall Mater 1991, 39: 735-752.

(下转第 18 页)

表 1 FGH95 粉末高温合金 600℃和 650℃的低周疲劳性能
Table 1 LCF properties of FGH95 at 600℃ and 650℃

应变 疲劳参量	γ %	P %	$\frac{\sigma_f'}{\text{MPa}}$	$\frac{\sigma_f'}{E}$ %	b	$\frac{\epsilon_f'}{\%}$	c	$\frac{K'}{\text{MPa}}$	n'
600℃	中值		2233	1.280	-0.096	2.72	-0.41	1584	0.042
	95	99.87	2029	1.163	-0.096	1.67	-0.41	—	—
650℃	中值		2058	1.218	-0.089	2.68	-0.485	1725	0.052
	95	99.87	1788	1.058	-0.089	1.30	-0.485	—	—
应变-寿命曲线			$\Delta\epsilon_f/2 = (\sigma_f'/E)(2N_f)^b + \epsilon_f'(2N_f)^c$						
循环应力-应变曲线			$\Delta\epsilon_f/2 = (\Delta\sigma/2E) + (\Delta\sigma/2K')^{1/n'}$						

合金 600℃下的强屈比 $\sigma_b/\sigma_{0.2} = 1.38(\sigma_b = 1\,540\text{MPa}, \sigma_{0.2} = 1\,115\text{MPa})$; 合金 650℃下的强屈比 $\sigma_b/\sigma_{0.2} = 1.35(\sigma_b = 1\,500\text{MPa}, \sigma_{0.2} = 1\,110\text{MPa})$ 。这说明该合金可能具有循环硬化特性, 它们的低周疲劳试验数据充分表明该合金具有循环硬化特性, 如图 5 和图 6 所示。

低周疲劳寿命不仅与材料强度有关, 而且取决于材料的塑性, 反映了材料的综合性能。试验结果表明: 由于该合金强度高, 塑性稍低, 在高应变水平下, 塑性起主要作用; 在低应变水平下, 强度起主要作用。北京航空材料研究院已研究了该合金在 400℃和 550℃下的低周疲劳性能, 本文又研究了该合金在 600℃和 650℃下的低周疲劳性能, 综合上述研究可得出: 该合金在 0.65%~0.43%的总应变范围内工作时, 具有良好的低周疲劳性能。

4 结论

a. 通过试验研究, 得到了该合金在 600℃、650℃下中值和置信度 $\gamma = 95\%$ 、存活率 $P = 99.87\%$ 的低周疲劳数据和表征材料特性的应变-寿命曲线、循环应力-应变曲线和各应变疲劳参量。为飞机发动机的粉末涡轮盘设计选材和寿命预估提供了依据。

b. 该合金在中、低应变水平下具有较高的低周疲劳性能。

c. 该合金在恒幅循环应变下具有明显的循环硬化特性。

参考文献:

[1] 谢济洲. 低循环疲劳手册[M]. 北京: 北京航空材料研究院, 1991: 1—32.

[2] GB/T15248-94 金属材料轴向等幅低循环疲劳试验方法[S].

[3] GJB/Z18—91, 金属材料力学性能数据表达准则[S].

[6] Zhang W C, Evans K E. Numerical Prediction of Mechanical Properties of Anisotropic Composite Materials [J]. Computers and Structures 1988, 29(3): 413-422.

[7] Fang Daining, Liu Tieqi . On the effect of Fiber Shape and Packing Array on Elastic Properties of Fiber—Polymer—Matrix Composites [J]. Inter J Polymeric Mater, 1996, 34(1): 75-90.

[8] Nakamura T, Suresh S. Effects of thermal residual stresses and fiber packing on deformation of metal matrix composites [J]. Acta Metall. Mater., 1993, 41(6): 1665-1681.

[9] Sun C T, Chen J L. Mechanical Characterization of SCS-6/Ti-64 Metal Matrix Composite [J]. J Comp Mater, 1990, 24: 1029-1059.

(上接第 15 页)